Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik211.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik211/ gefunden werden.

Sofern im Dokuments nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.

[disclaimer]

physik210 Übung 1

Martin Ueding*
Gruppe 2
Tutor: Tobias Guttenberger

17. April 2012

1 Aufgabe 1

1.1 Aufgabe 1a

Um den Sattelpunkt zu bestimmen, muss man Nullstellen der ersten Ableitungen finden.

$$\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{2an^2}{V^3} - \frac{nRT}{(-bn+V)^2}$$
$$\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = -\frac{6an^2}{V^4} + \frac{2nRT}{(-bn+V)^3}$$

Setzt man $\frac{\partial p}{\partial V} = 0 \wedge \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0$, so erhält man $V_C = 3bn$ und $T_C = \frac{8a}{27bR}$. p_C lässt sich daraus errechnen:

Setzt man in $p(V,T)$ die kritischen Werte V_C und T_C ein, erhält man tatsächlich p_C:

$$p_C = \frac{nR\frac{8a}{27Rb}}{3nb - bn} - \frac{an^2}{(3nb)^2} = \frac{8a}{27(3-1)b^2} - \frac{a}{(3b)^2} = \frac{4a}{27b^2} - \frac{3a}{27b^2} = \frac{a}{27b^2}$$

Somit stimmen die auf dem Übungzettel angegebenen, kritischen Werte.

1.2 Aufgabe 1b

Die Isothermen im Van-der-Waals Gas sind in Abbildung 1 gezeigt, für das ideale Gas in Abbildung 2.

1.3 Aufgabe 1c

p ist schon gegeben:

$$p(V,T) = -\frac{an^2}{V^2} + \frac{nRT}{-bn+V}$$

Bei $V(p,T)$ muss man umstellen:

$$V(p,T) = \frac{nRT}{p}$$

*mu@uni-bonn.de

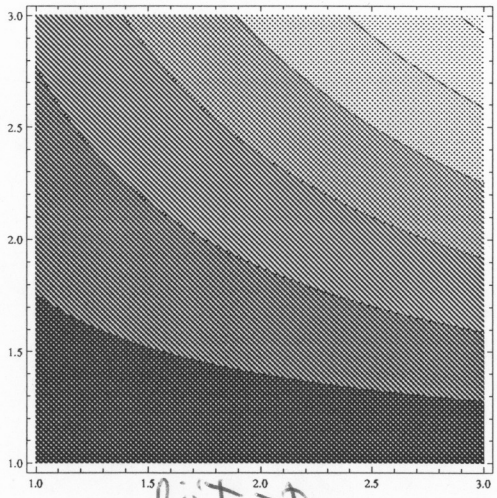

Abbildung 1: Isothermen im Van-der-Waals Gas

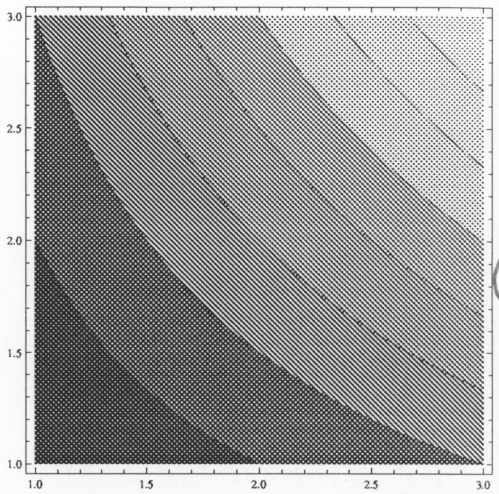

Abbildung 2: Isothermen im idealen Gas

Die partiellen Ableitungen von p und V zu bestimmen ist recht einfach.

$$\gamma_V = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nR}{p(-bn+V)}$$

$$\alpha_p = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{pV}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{nRT}{p^2V}$$

2 Aufgabe 2

Ein dreiatomiges Gas hat, wie jedes andere Gas auch, drei Freiheitsgrade für die Translation. Dazu kommen noch drei weitere Freiheitsgrade für die Rotation, also $f = 6$. Jeder Freiheitsgrad hat $E = \frac{1}{2}kT$. Somit gilt pro Teilchen:

$$E = 3kT$$

$$\frac{\partial E}{\partial T} = 3k$$

Für n mol Teilchen multipliziert man mit $N = nN_A$.

$$\frac{\partial E}{\partial T}n = 3nN_Ak$$

Jetzt kann man k und N_A durch R, die Gaskonstante, ersetzen und erhält:

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{\partial E}{\partial T}n = \frac{1}{n}3nR$$

$$C_V = 3R$$

Allerdings hängt dies überhaupt nicht von der Temperatur ab, daher ist ein Diagram recht witzlos. Wann die Rotation und Vibration angeregt werden können, braucht laut „Gerthsen Physik“ Quantenmechanik.

Die dort gezeigten Kurven sehen ungefähr so aus, wie in Abbildung 3 angedeutet. Die Knicke in der Kurve kommen daher, dass die verschiedenen Freiheitsgrade aus der Vibration und Rotation unterschiedliche Anregungsenergien benötigen. Bei höheren Temperaturen wird die Energie auf mehr Freiheitsgrade verteilt, damit kann das Energie pro ΔT mehr Energie aufnehmen.

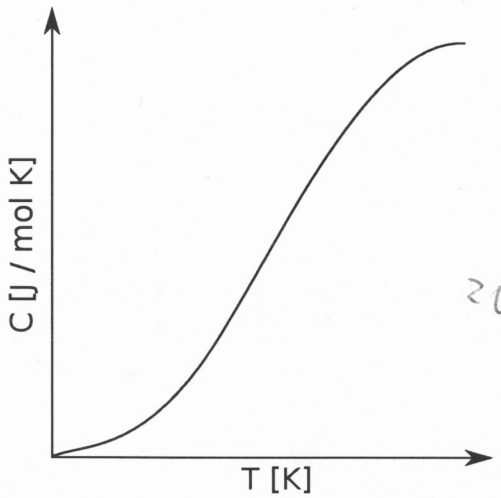

Abbildung 3: Wärmekapazität C_V in Abhängigkeit von der Temperatur.

3 Aufgabe 3

In Abbildung 4 ist ein V-p- und in Abbildung 5 ein T-V-Diagram gezeigt.

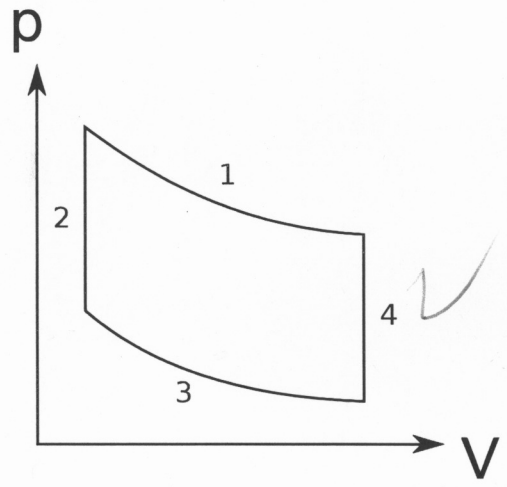

Abbildung 4: V-p-Diagram

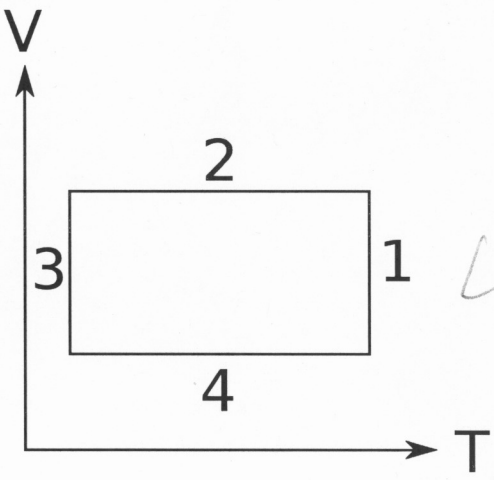

Abbildung 5: V-T-Diagram

isotherme Expansion Hier gilt $\mathrm{d}T = 0$, $pV = nRT_2$, $V_1 \to V_2$, $p_1 \to p_2$.

Die Wärme des Stoffes ändert sich nicht, da sich die Temperatur nicht ändert, $\mathrm{d}Q = 0$.

Es wird allerdings Arbeit geleistet:

$$\mathrm{d}W = -p\,\mathrm{d}V = -\frac{nRT_2}{V}dV$$
$$\Delta W = -nRT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Somit ändert sich die innere Energie um $\Delta U = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$.

isochore Abkühlung Hier gilt $\mathrm{d}V = 0$, $\frac{T}{p} = \text{const.}$, $T_2 \to T_1$, $p_2 \to p_3$.

Die Wärme des Stoffes ändert sich:

$$\mathrm{d}Q = c_V \,\mathrm{d}T$$
$$\Delta Q = c_V \int_{T_2}^{T_1} \mathrm{d}T = c_V(T_1 - T_2)$$

Da sich das Volumen nicht ändert, wird keine Druckarbeit geleistet, $\mathrm{d}W = 0$.

Somit ändert sich die innere Energie um $\Delta U = c_V(T_1 - T_2)$.

isotherme Kompression Analog zur Expansion gilt hier $\mathrm{d}T = 0$, $pV = nRT_1$, $V_2 \to V_1$, $p_3 \to p_4$.

Die Wärme des Stoffes ändert sich nicht, da sich die Temperatur nicht ändert, $\mathrm{d}Q = 0$.

Es wird allerdings Arbeit geleistet:

$$\mathrm{d}W = -p\,\mathrm{d}V = -\frac{nRT_1}{V}dV$$
$$\Delta W = -nRT_1 \int_{V_2}^{V_1} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Somit ändert sich die innere Energie um $\Delta U = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$.

isochore Erhitzung Analog zur Abkühlung gilt $\mathrm{d}V = 0$, $\frac{T}{p} = \text{const.}$, $T_1 \to T_2$, $p_4 \to p_1$.

Die Wärme des Stoffes ändert sich:

$$\mathrm{d}Q = c_V \,\mathrm{d}T$$
$$\Delta Q = c_V \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{d}T = c_V(T_2 - T_1)$$

Da sich das Volumen nicht ändert, wird keine Druckarbeit geleistet, $\mathrm{d}W = 0$.

Somit ändert sich die innere Energie um $\Delta U = c_V(T_2 - T_1)$.

Nimmt man alle Änderungen zusammen, ergibt sich:

$$\sum \Delta Q = 0 + c_V(T_1 - T_2) + 0 + c_V(T_2 - T_1) = 0$$
$$\begin{aligned}\sum \Delta W &= nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + 0 + nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + 0 \\ &= nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ &= nR(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ &= \frac{p_1 V_1}{T_2}(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ &= \left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right) p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\end{aligned}$$
$$\sum \Delta U = \sum \Delta Q + \sum \Delta U = \left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right) p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Der Kreisprozess beschreibt einen Stirlingsmotor. Das warme Gas leistet viel Arbeit gegen einen hohen Druck, dann kühlt es ab und wird unter weniger Druck (und weniger Arbeit) wieder komprimiert. Dann wird es wieder erwärmt und der Druck erhöht. Im dritten Schritt geht zwar Arbeit verloren, jedoch wird dies vom ersten Schritt mehr als kompensiert.

4 Aufgabe 4

4.1 Aufgabe 4a

Zu erst einige Hilfsgrößen:

Radius $r := 9\,\mathrm{m}$

Volumen $V := 972\pi\,\mathrm{m}^3$

Ballonmasse $M := m_H + m_L = 700\,\mathrm{kg}$

äußerer Luftdruck $p_0 := 101325\,\mathrm{Pa}$ [ ]

Korrekturfaktor Die Luftdichte ist bei den STP Bedingungen angegeben, es gilt also

$$\frac{p_S}{T_S R} = \left(\frac{V}{n}\right)_S \propto \rho_S.$$

Also definiere ich

$$\lambda := \frac{101325\,\mathrm{Pa}}{10^5\,\mathrm{Pa}} \frac{273.15\,\mathrm{K}}{293.15\,\mathrm{K}} = 0.944122$$

als Korrekturfaktor für die Dichte der äußeren Luft bei 20°C.

Luftdichte außen auf dem Boden $\rho_0 := \lambda \cdot 1.293\,\mathrm{kg/m^3} = 1.22075\,\mathrm{kg/m^3}$

molare Masse vom Luft $m_{mol} := 28.97 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}$ [ ]

Die wichtige Randbedingung ist, dass im Ballon der gleiche Druck herrscht wie draußen. Nur dadurch wird verhindert, dass der Ballon aus- oder volläuft. Der Ballon drückt mit seinem Volumen eine gewisse Menge Luft weg. Das gewicht dieser kalten Luft ist der Auftrieb. Es darf nur noch so viel Luft in den Ballon gefüllt werden, dass er nicht mehr wiegt als der Auftrieb tragen kann. Und damit die Bedingung an den Innendruck erfüllt wird, muss die Luft innen warm sein.

Es gilt also für die Masse der Luft innen m:

$$m = V\rho_0 - M = 3027.71\,\mathrm{kg}$$

Für die Gasgleichung in mol:

$$n = \frac{m}{m_{mol}} = 104512\,\mathrm{mol}$$

Auflösen von $p_0 V = nRT$ nach T liefert:

$$T = 356.067\,\mathrm{K}$$

4.2 Aufgabe 4b

In der größeren Höhe hat der äußere Luftdruck leicht abgenommen, und damit auch die Dichte, da es sich bei der Luft um ein ideales Gas handelt, bei dem $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$ gilt. Den neuen Luftdruck bestimmt man mit der barometrischen Höhenformel.

$$p_1 = p_0 \exp\left(-\frac{500\,\mathrm{m}}{8300\,\mathrm{m}}\right) = 95401.3\,\mathrm{Pa}$$

Die Dichte verringert sich um den gleichen Faktor:

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{p_1}{p_0} = 1.14938\,\mathrm{kg/m^3}$$

Der Rest folgt analog:

$$m = V\rho_1 - M = 2809.78\,\text{kg}$$

$$n = \frac{m}{m_{mol}} = 96989.4\,\text{mol}$$

$$T = 361.253\,\text{K}$$

5 Aufgabe 5

Der Sensor hängt bei 33 cm. Um α zu bestimmen benutze ich die Konzentrationsverteilung:

$$c(z) = \alpha z^2$$
$$0.5445\,\text{mol/m}^3 = \alpha(0.33\,\text{m})^2$$

Somit ist $\alpha = 5\,\text{mol/m}^5$.

Für die Diffusion gilt

$$j_{\text{diff}} = -D\frac{\text{d}c(z)}{\text{d}z}.$$

Bei $z = 0.10\,\text{m}$ ist der Strom dann:

$$\begin{aligned} j_{\text{diff}} &= -D2\alpha z \\ &= -2 \cdot 1.79 \cdot 10^{-9}\,\text{m}^2/\text{s} \cdot 5\,\text{mol/m}^5 \cdot 0.10\,\text{m} \\ &= -1.79 \cdot 10^{-9}\,\text{mol/m}^2\cdot\text{s} \end{aligned}$$

Literatur

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_pressure

[2] http://www.engineeringtoolbox.com/molecular-mass-air-d_679.html